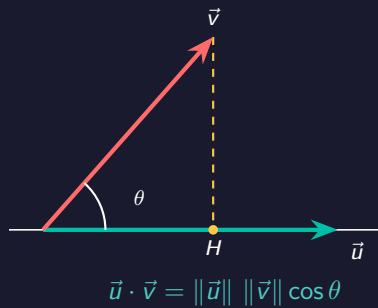


FICHE 07

Produit scalaire

Définition & expressions ■ Orthogonalité ■ Formule d'Al-Kashi



Première ■ Spécialité Mathématiques ■ Programme officiel



Table des matières

1	Pourquoi le produit scalaire ?	3
1.1	Le problème fondamental	3
1.2	L'idée directrice	3
2	L'idée avant la formule	4
2.1	Un produit qui tient compte de l'angle	4
2.2	La projection orthogonale	4
2.3	Quatre façons de le calculer	4
3	Le cours complet	5
3.1	Définition	5
3.2	Symétrie et bilinéarité	5
3.3	Les identités de développement	6
3.4	Expression dans un repère orthonormé	6
3.5	Orthogonalité	7
3.6	Récapitulatif : les quatre méthodes de calcul	8
3.7	La formule d'Al-Kashi	8
3.8	L'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$	9
4	Boîte à outils : réflexes pour le bac	10
5	Exercices	12
6	Problème : Étude d'un triangle par le produit scalaire ★★★	14
7	✓ Corrigés détaillés	15

1 Pourquoi le produit scalaire ?

1.1 Le problème fondamental

Jusqu'ici, le calcul vectoriel sert à additionner des vecteurs et à parler de directions. Mais comment, **avec des vecteurs**, mesurer un **angle** ? Tester si deux droites sont **perpendiculaires** ? Calculer une **longueur** dans une figure ? Il manque une opération qui relie les vecteurs aux **angles et aux distances**. Cette opération, c'est le **produit scalaire** : elle prend deux vecteurs et renvoie un **nombre** (un « scalaire ») qui encode à la fois leurs longueurs et l'angle entre eux.

Angles
calculer un
angle exact

Longueurs
formule
d'Al-Kashi

Orthogonalité
tester \perp
sans rapporteur

Physique
travail d'une
force $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$

Orthogonalité. Deux vecteurs sont perpendiculaires exactement quand leur produit scalaire est **nul**. C'est le test le plus simple qui soit.

Longueurs et angles. La **formule d'Al-Kashi** (une généralisation du théorème de Pythagore aux triangles quelconques) se démontre en quelques lignes avec le produit scalaire.

Physique. Le **travail** d'une force vaut $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$: seule la part de la force « dans le sens du déplacement » compte. Le produit scalaire mesure exactement cette part.

1.2 L'idée directrice

L'idée directrice :

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est un **nombre**, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, qui vaut $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ (avec θ l'angle entre eux). Il mesure « à quel point les deux vecteurs vont dans la même direction » : **positif** s'ils pointent du même côté, **nul** s'ils sont **perpendiculaires**, **négatif** s'ils s'opposent. On peut le calculer de **quatre façons** selon ce qu'on connaît.

Intuition | Pourquoi c'est un chapitre clé

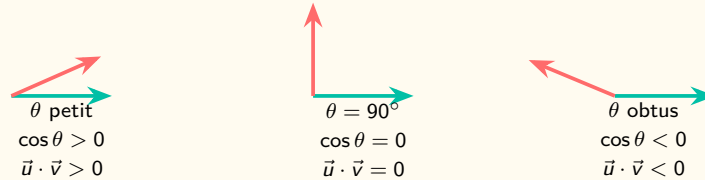
Le produit scalaire est l'outil qui fait entrer le **calcul** dans la **géométrie** : longueurs, angles, orthogonalité deviennent de simples calculs. Il prolonge la trigonométrie (le cos y apparaît), s'utilise en physique, et prépare la géométrie repérée (vecteurs normaux, équations de cercles) de la fiche suivante. En Terminale, il s'étend à l'espace.

2 L'idée avant la formule

2.1 Un produit qui tient compte de l'angle

Intuition | Même sens, perpendiculaire, ou opposé ?

Multiplier deux nombres, c'est simple. Mais deux **vecteurs** ont une **direction** : leur « produit » doit en tenir compte. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ fait exactement cela, grâce au $\cos \theta$:



Cas particulier capital : si \vec{u} et \vec{v} sont **perpendiculaires**, $\cos 90^\circ = 0$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Réciproquement, si le produit scalaire est nul (et les vecteurs non nuls), ils sont perpendiculaires.

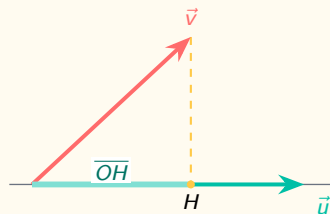
2.2 La projection orthogonale

Intuition | L'ombre d'un vecteur sur l'autre

Une autre façon de voir $\vec{u} \cdot \vec{v}$: on projette \vec{v} **orthogonalement** sur la direction de \vec{u} (comme l'ombre de \vec{v} à midi sur la droite de \vec{u}). Si H est le pied de cette projection, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \overline{OH}$$

où \overline{OH} est la **mesure algébrique** (positive si H est du côté de \vec{u} , négative sinon). C'est la même valeur que $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$, car $\overline{OH} = \|\vec{v}\| \cos \theta$.



2.3 Quatre façons de le calculer

Intuition | On choisit selon ce qu'on connaît

Le même nombre $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se calcule de quatre manières équivalentes ; on prend la plus pratique :

1. **Normes et angle** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ (quand on connaît l'angle).
2. **Coordonnées** (repère orthonormé) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ (le plus rapide quand on a les coordonnées).
3. **Projection orthogonale** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \overline{OH}$.
4. **Normes seules** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

3 Le cours complet

3.1 Définition

Définition | Produit scalaire

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan, et θ l'angle (géométrique, entre 0 et π) qu'ils forment. Le **produit scalaire** de \vec{u} et \vec{v} est le **nombre réel** :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

Par convention, si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Attention | Un produit scalaire est un NOMBRE

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ n'est pas un vecteur : c'est un **nombre** (positif, négatif ou nul). On ne peut donc pas « additionner » $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec un vecteur. Et le point « \cdot » se lit « scalaire », pas « fois ».

✓ Propriété | Carré scalaire

En prenant $\vec{v} = \vec{u}$ (donc $\theta = 0$ et $\cos 0 = 1$) :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2.$$

On le note \vec{u}^2 et on l'appelle le **carré scalaire**. Ainsi $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$: le produit scalaire **contient** les longueurs.

3.2 Symétrie et bilinéarité

★ Théorème | Propriétés de calcul

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :

- **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- **Bilinéarité** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$.

Conséquence : on **développe** les produits scalaires comme une multiplication ordinaire (en gardant l'ordre sans importance grâce à la symétrie).

Intuition | Ce que dit la bilinéarité

La symétrie vient du fait que $\cos \theta$ ne dépend pas de l'ordre des deux vecteurs. La bilinéarité (admise ici) signifie qu'on peut **distribuer** et **sortir les coefficients** : par exemple $(2\vec{u}) \cdot (3\vec{v}) = 6(\vec{u} \cdot \vec{v})$, et $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$. Exactement comme une double distribution.

3.3 Les identités de développement

★ Théorème | Développement de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2, \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

Démonstration / Développement de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$

On utilise le carré scalaire et la bilinéarité (comme une identité remarquable) :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

Par symétrie $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, et $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$. Donc

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

Le calcul avec $\vec{u} - \vec{v}$ est identique (le double produit change de signe). ■

★ Théorème | Produit scalaire à partir des normes seules

En isolant $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans le développement précédent :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

3.4 Expression dans un repère orthonormé

★ Théorème | Produit scalaire et norme en coordonnées

Dans un repère **orthonormé**, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Démonstration / Expression $xx' + yy'$ (en coordonnées)

Dans un repère orthonormé, la longueur d'un vecteur se calcule par Pythagore : $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$, $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$, et $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ donne $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2$. On reporte dans la formule des normes :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} [(x + x')^2 + (y + y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)].$$

En développant $(x + x')^2 = x^2 + 2xx' + x'^2$ (idem pour y), tout se simplifie :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') = xx' + yy'.$$

■

Exemple | Calculs en coordonnées

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 4 = 6 - 4 = 2$. De plus $\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Méthode | Calculer un angle

De $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$, on tire $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$. On calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et les normes en coordonnées, puis on obtient $\cos \theta$, donc θ .

3.5 Orthogonalité

★ Théorème | Caractérisation de l'orthogonalité

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont **orthogonaux** (perpendiculaires) si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

En coordonnées (repère orthonormé) : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0$.

Démonstration | Pourquoi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ caractérise \perp

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$. Comme \vec{u} et \vec{v} sont non nuls, $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$. Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si $\cos \theta = 0$, c'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{2}$: les vecteurs sont perpendiculaires. ■

Exemple | Tester une orthogonalité

$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-4) + 2 \times 6 = -12 + 12 = 0$. Donc $\vec{u} \perp \vec{v}$: les vecteurs sont perpendiculaires.

3.6 Récapitulatif : les quatre méthodes de calcul

Méthode | Quelle expression choisir ?

Ce que je connais	J'utilise
les coordonnées	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ (le plus rapide)
les normes et l'angle	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \cos \theta$
une projection orthogonale	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \times \overline{OH}$
seulement des longueurs	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u} - \vec{v}\ ^2)$

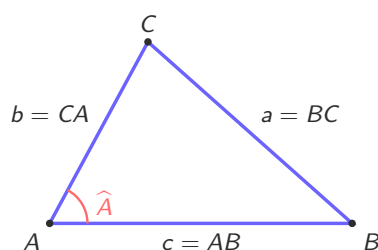
3.7 La formule d'Al-Kashi

★ Théorème | Formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC , en notant $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ et \hat{A} l'angle en A :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

(C'est la généralisation du théorème de Pythagore : si $\hat{A} = 90^\circ$, $\cos \hat{A} = 0$ et on retrouve $a^2 = b^2 + c^2$.)



Démonstration | Formule d'Al-Kashi (exigible)

On exprime \vec{BC} à l'aide de A : $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$. On calcule le carré scalaire :

$$a^2 = \|\vec{BC}\|^2 = (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \|\vec{AC}\|^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} + \|\vec{AB}\|^2.$$

Or $\|\vec{AC}\| = b$, $\|\vec{AB}\| = c$, et $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \|\vec{AC}\| \|\vec{AB}\| \cos \hat{A} = bc \cos \hat{A}$ (l'angle entre \vec{AC} et \vec{AB} est l'angle \hat{A}). Donc

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$



Exemple | Calculer une longueur avec Al-Kashi

Dans un triangle, $b = CA = 5$, $c = AB = 7$ et $\hat{A} = 60^\circ$. Alors

$$a^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos 60^\circ = 25 + 49 - 70 \times \frac{1}{2} = 74 - 35 = 39,$$

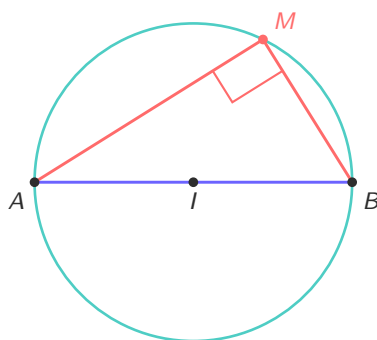
donc $a = BC = \sqrt{39} \approx 6,24$.

3.8 L'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ **★ Théorème | Le cercle de diamètre $[AB]$**

Soient A et B deux points distincts. L'ensemble des points M du plan tels que

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

est le **cercle de diamètre $[AB]$** . (Autrement dit : M voit le segment $[AB]$ sous un angle droit.)

*Démonstration | L'ensemble $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ (exigible)*

Soit I le **milieu** de $[AB]$. On a alors $\vec{IA} = -\vec{IB}$. On décompose chaque vecteur avec la relation de Chasles via I :

$$\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA}, \quad \vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB} = \vec{MI} - \vec{IA}.$$

On reconnaît une identité remarquable $(\vec{X} + \vec{Y}) \cdot (\vec{X} - \vec{Y}) = \|\vec{X}\|^2 - \|\vec{Y}\|^2$ avec $\vec{X} = \vec{MI}$ et $\vec{Y} = \vec{IA}$:

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \|\vec{MI}\|^2 - \|\vec{IA}\|^2 = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$

Donc $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \iff MI^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \iff MI = \frac{AB}{2}$. C'est exactement le cercle de centre I (milieu de $[AB]$) et de rayon $\frac{AB}{2}$, c'est-à-dire le **cercle de diamètre $[AB]$** . ■

4 Boîte à outils : réflexes pour le bac

Méthode | Les réflexes essentiels

1. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un **NOMBRE** (jamais un vecteur).
2. **Coordonnées connues ?** $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$. C'est presque toujours le plus rapide.
3. **Perpendiculaire ?** teste $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (soit $xx' + yy' = 0$).
4. **Angle ?** $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$.
5. **Longueur dans un triangle ?** pense à **Al-Kashi** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.
6. **Développer** se fait comme une identité remarquable : $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
7. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ décrit le **cercle de diamètre** $[AB]$.

Méthode | Formulaire complet

Objet	Formule
Définition	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \cos \theta$
Coordonnées (orthonormé)	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
Norme	$\ \vec{u}\ = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = \ \vec{u}\ ^2$
Normes seules	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u} - \vec{v}\ ^2)$
Développement	$\ \vec{u} \pm \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \ \vec{v}\ ^2$
Orthogonalité	$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
Al-Kashi	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$
Cercle de diamètre $[AB]$	$\{M : \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0\}$

Attention | Top 6 des erreurs à éviter

1. **Traiter $\vec{u} \cdot \vec{v}$ comme un vecteur.** C'est un nombre.
2. **Oublier que la formule $xx' + yy'$ exige un repère ORTHONORMÉ.**
3. **Se tromper de signe** dans $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ (le double produit est $-2\vec{u} \cdot \vec{v}$).
4. **Confondre l'angle :** dans $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$, l'angle est en A (sommet commun).
5. **Oublier le facteur 2** dans $-2bc \cos \hat{A}$ (Al-Kashi).
6. **Croire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ veut dire $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.** Non : ça veut dire **perpendiculaires**.

Méthode | Algorithme : produit scalaire et angle en Python

```
1 from math import sqrt, acos, degrees
2
3 def produit_scalaire(u, v):
4     return u[0]*v[0] + u[1]*v[1]
5
6 def norme(u):
7     return sqrt(u[0]**2 + u[1]**2)
8
9 def angle(u, v):                                     # angle en degres entre u et v
10     c = produit_scalaire(u, v) / (norme(u) * norme(v))
11     return degrees(acos(c))
12
13 print(produit_scalaire((3,-1), (2,4))) # 2
14 print(angle((1,0), (1,1)))           # 45.0
```

5 Exercices

Exercice 1 ★★ : Produit scalaire en coordonnées

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans un repère orthonormé.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2 ★★ : Normes

Calculer $\|\vec{u}\|$ pour : a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; b) $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$; c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 ★★ : Orthogonalité

Les vecteurs sont-ils orthogonaux ?

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 4 ★★ : Avec normes et angle

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sachant que :

1. $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 5$ et $\theta = 60^\circ$.
2. $\|\vec{u}\| = 4, \|\vec{v}\| = 2$ et $\theta = 135^\circ$.
3. $\|\vec{u}\| = 6, \|\vec{v}\| = 1$ et $\theta = 90^\circ$.

Exercice 5 ★★ : Calculer un angle

Dans un repère orthonormé, on donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\cos \theta$ puis l'angle θ entre \vec{u} et \vec{v} .

Exercice 6 ★★ : Avec des points

On donne $A(1; 2), B(4; 3), C(2; -1)$.

1. Donner les coordonnées de \vec{AB} et \vec{AC} .
2. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. Le triangle est-il rectangle en A ?
3. Calculer les longueurs AB et AC.

Exercice 7 ★★ : Développer

Développer et simplifier (en fonction de $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$).

1. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.
2. $\|2\vec{u} + \vec{v}\|^2$.

Exercice 8 ★★ : Produit scalaire par les normes

On sait que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{13}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ à l'aide des normes.

Exercice 9 ★★ : Al-Kashi (longueur)

Dans un triangle ABC , $AB = 6$, $AC = 4$ et $\hat{A} = 120^\circ$. Calculer BC .

Exercice 10 ★★ : Al-Kashi (angle)

Dans un triangle ABC , $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$. Calculer $\cos \hat{A}$, puis dire si l'angle \hat{A} est aigu ou obtus.

Exercice 11 ★★ : Vecteur orthogonal

On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un vecteur \vec{v} orthogonal à \vec{u} (non nul).
2. Tous les vecteurs orthogonaux à \vec{u} sont-ils colinéaires entre eux ? Justifier.

Exercice 12 ★★ : Démonstrations de cours

1. Démontrer la formule d'Al-Kashi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.
2. Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 13 ★★ : Triangle rectangle ?

On donne $A(-1; 1)$, $B(3; 3)$, $C(1; -3)$.

1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ et $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.
2. Le triangle ABC est-il rectangle ? Si oui, en quel sommet ?

Exercice 14 ★★ : Ensemble de points

On donne $A(-2; 0)$ et $B(2; 0)$. Déterminer et décrire l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ (on calculera $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ en coordonnées et on reconnaîtra une équation de cercle).

Exercice 15 ★★ : Hauteur et orthogonalité

Dans un triangle ABC , soit H le pied de la hauteur issue de A (donc $AH \perp BC$). On note \vec{AH} et \vec{BC} .

1. Que vaut $\vec{AH} \cdot \vec{BC}$? Justifier.
2. En déduire, en développant $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ avec $\vec{AB} = \vec{AH} + \vec{HB}$, une relation simple.

Exercice 16 ★★★ : Ensemble équidistant (médiatrice)

On donne $A(1; 2)$ et $B(5; 4)$. Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $MA = MB$ (on écrira $MA^2 = MB^2$ et on développera). Reconnaitre cet ensemble.

Exercice 17 ★★★ : Les trois angles d'un triangle

Dans un repère orthonormé, $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(1; 3)$.

1. Calculer $\cos \hat{A}$, $\cos \hat{B}$ et $\cos \hat{C}$.
2. Le triangle a-t-il un angle obtus ? Donner une valeur approchée de chaque angle.

Exercice 18 ★★★ : Travail d'une force (physique)

Une force \vec{F} de norme 50 N tire un chariot sur une distance de 20 m, en faisant un angle de 30° avec le déplacement \vec{d} . Le travail de la force est $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Calculer W (en joules).

6 Problème : Étude d'un triangle par le produit scalaire ★★★

Problème style prépa

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1; 1)$, $B(5; 3)$ et $C(2; 5)$. Ce problème exploite toutes les méthodes du chapitre : coordonnées, orthogonalité, angles, Al-Kashi, et l'ensemble $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

Partie A : longueurs et nature du triangle

1. Calculer les coordonnées de \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{BC} .
2. Calculer les longueurs AB , AC et BC .
3. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. Le triangle est-il rectangle en A ?

Partie B : un angle

4. Déterminer $\cos \hat{A}$ (l'angle en A). En déduire une valeur approchée de \hat{A} en degrés.
5. Vérifier le résultat avec la formule d'Al-Kashi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ (avec $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$).

Partie C : un point particulier

6. Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$, puis le rayon du cercle de diamètre $[AB]$.
7. Écrire, en coordonnées, la condition $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ pour un point $M(x; y)$, et reconnaître l'équation du cercle de diamètre $[AB]$.
8. Le point C appartient-il à ce cercle ? (Relier à la réponse de la Partie A.)

Partie D : aire

9. À l'aide de $\sin \hat{A}$ (obtenu depuis $\cos \hat{A}$ et $\cos^2 + \sin^2 = 1$), calculer l'aire du triangle par la formule $\mathcal{A} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}$.

7 ✓ Corrigés détaillés

Intuition | Comment lire un corrigé

Chaque corrigé rappelle la méthode et détaille tous les calculs. Réflexe du chapitre : en coordonnées, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$; pour une longueur dans un triangle, Al-Kashi.

Corrigé 1

Démonstration

On applique $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

a) $2 \times 5 + 3 \times (-1) = 10 - 3 = 7$. **b)** $(-1) \times 4 + 4 \times 1 = -4 + 4 = 0$.

c) $3 \times (-2) + 0 \times 7 = -6$. **d)** $(-2) \times (-1) + (-3) \times 2 = 2 - 6 = -4$.

Corrigé 2

Démonstration

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

a) $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. **b)** $\sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$. **c)** $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. **d)** $\sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Corrigé 3

Démonstration

Orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

a) $2 \times 3 + 3 \times (-2) = 6 - 6 = 0$: **orthogonaux**. **b)** $1 \times 5 + 5 \times 1 = 10 \neq 0$: **non**.

c) $4 \times 1 + (-1) \times 4 = 0$: **orthogonaux**. **d)** $(-3) \times 4 + 6 \times 2 = -12 + 12 = 0$: **orthogonaux**.

Corrigé 4

Démonstration

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

1. $3 \times 5 \times \cos 60^\circ = 15 \times \frac{1}{2} = 7,5$. **2.** $4 \times 2 \times \cos 135^\circ = 8 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2} \approx -5,66$.

3. $6 \times 1 \times \cos 90^\circ = 0$ (vecteurs perpendiculaires).

Corrigé 5

Démonstration

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + 1 \times 0 = 1. \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{1} = 1. \quad \text{Donc}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On reconnaît une valeur remarquable : $\theta = 45^\circ$ (soit $\frac{\pi}{4}$).

Corrigé 6

Démonstration

1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times 1 + 1 \times (-3) = 3 - 3 = 0$. Donc $\vec{AB} \perp \vec{AC}$: le triangle est **rectangle en A**.
3. $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ (le triangle est même rectangle isocèle).

Corrigé 7

Démonstration

1. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ (le double produit s'annule par symétrie).
2. $\|2\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} + \vec{v}) = 4\vec{u} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 4\|\vec{u}\|^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Corrigé 8

Démonstration

On part de $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. Avec les valeurs :

$$13 = 16 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 9 = 25 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \implies 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 25 - 13 = 12 \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = 6.$$

Corrigé 9

Démonstration

Al-Kashi avec $b = AC = 4$, $c = AB = 6$, $\hat{A} = 120^\circ$ ($\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$) :

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 52 + 24 = 76.$$

Donc $BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \approx 8,72$.

Corrigé 10

Démonstration

Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$, soit $49 = 25 + 9 - 2 \times 5 \times 3 \cos \hat{A} = 34 - 30 \cos \hat{A}$. Donc

$$30 \cos \hat{A} = 34 - 49 = -15 \implies \cos \hat{A} = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2}.$$

Comme $\cos \hat{A} < 0$, l'angle \hat{A} est **obtus** (ici $\hat{A} = 120^\circ$).

Corrigé 11

Démonstration

1. On cherche $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3a - 2b = 0$. Une solution simple : $a = 2$, $b = 3$, soit $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (vérif : $3 \times 2 - 2 \times 3 = 0$).
2. Oui : dans le plan, la direction orthogonale à \vec{u} est **unique** (une seule droite perpendiculaire passant par l'origine). Tous les vecteurs orthogonaux à \vec{u} sont donc de la forme $k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: ils sont tous colinéaires.

Corrigé 12

Démonstration

1. $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$, donc $a^2 = \|\vec{BC}\|^2 = (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \|\vec{AC}\|^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} + \|\vec{AB}\|^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.
2. Soit I le milieu de $[AB]$ ($\vec{IA} = -\vec{IB}$). Alors $\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA}$ et $\vec{MB} = \vec{MI} - \vec{IA}$, donc $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \|\vec{MI}\|^2 - \|\vec{IA}\|^2 = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2$. Cela vaut 0 si et seulement si $MI = \frac{AB}{2}$: c'est le cercle de diamètre $[AB]$.

Corrigé 13

Démonstration

1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 2 + 2 \times (-4) = 8 - 8 = 0$.
 $\vec{BA} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$: $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 8 + 12 = 20$.
 $\vec{CA} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{CB} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$: $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = -4 + 24 = 20$.
2. Seul $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$: le triangle est **rectangle en A**.

Corrigé 14

Démonstration

$\vec{MA} \begin{pmatrix} -2-x \\ -y \end{pmatrix}$ et $\vec{MB} \begin{pmatrix} 2-x \\ -y \end{pmatrix}$. Donc

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (-2-x)(2-x) + (-y)(-y) = (x^2 - 4) + y^2 = x^2 + y^2 - 4.$$

La condition $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ s'écrit $x^2 + y^2 = 4$: c'est le **cercle de centre O et de rayon 2**, qui est bien le cercle de diamètre $[AB]$ (car $A(-2; 0)$ et $B(2; 0)$, donc $AB = 4$ et le rayon vaut 2).

Corrigé 15

Démonstration

1. H est le pied de la hauteur issue de A , donc $\vec{AH} \perp \vec{BC}$, ce qui donne $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$.
2. Avec $\vec{AB} = \vec{AH} + \vec{HB}$:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = (\vec{AH} + \vec{HB}) \cdot \vec{BC} = \underbrace{\vec{AH} \cdot \vec{BC}}_{=0} + \vec{HB} \cdot \vec{BC} = \vec{HB} \cdot \vec{BC}.$$

Autrement dit $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{HB} \cdot \vec{BC}$: projeter \vec{AB} sur (BC) revient à projeter \vec{HB} . C'est ce qui caractérise H comme projeté orthogonal de A sur (BC) .

Corrigé 16

Démonstration

$MA^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$ et $MB^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$. On écrit $MA^2 = MB^2$:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2.$$

On développe : $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16$. Les x^2 et y^2 se simplifient :

$$-2x - 4y + 5 = -10x - 8y + 41 \implies 8x + 4y - 36 = 0 \implies 2x + y - 9 = 0.$$

C'est une **droite** : la **médiatrice** du segment $[AB]$ (l'ensemble des points à égale distance de A et B).

Corrigé 17

Démonstration

1. En A : $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc $\cos \hat{A} = \frac{4 \times 1 + 0 \times 3}{4 \times \sqrt{10}} = \frac{4}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,316$.

En B : $\vec{BA} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc $\cos \hat{B} = \frac{12 + 0}{4 \times \sqrt{18}} = \frac{12}{4 \times 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$.

En C : $\vec{CA} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{CB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc $\cos \hat{C} = \frac{-3 + 9}{\sqrt{10} \times \sqrt{18}} = \frac{6}{\sqrt{180}} \approx 0,447$.

2. Les trois cosinus sont **positifs** : les trois angles sont **aigus** (triangle acutangle). Valeurs approchées : $\hat{A} \approx 71,6^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} \approx 63,4^\circ$ (somme $\approx 180^\circ \checkmark$).

Corrigé 18

Démonstration

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos 30^\circ = 50 \times 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1000 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 500\sqrt{3} \approx 866 \text{ J.}$$

Corrigé du problème : Étude d'un triangle

Démonstration / Partie A : longueurs et nature

- $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$
- $AB = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; AC = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}; BC = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 1 + 2 \times 4 = 4 + 8 = 12 \neq 0$: le triangle **n'est pas rectangle en A**.

Démonstration / Partie B : un angle

- $\cos \hat{A} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{12}{\sqrt{20} \times \sqrt{17}} = \frac{12}{\sqrt{340}} \approx 0,651.$ Donc $\hat{A} \approx 49,4^\circ.$
- Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ avec $a = BC = \sqrt{13}, b = CA = \sqrt{17}, c = AB = \sqrt{20}$:
 $13 = 17 + 20 - 2\sqrt{17}\sqrt{20} \cos \hat{A} = 37 - 2\sqrt{340} \cos \hat{A},$ d'où $\cos \hat{A} = \frac{37-13}{2\sqrt{340}} = \frac{24}{2\sqrt{340}} = \frac{12}{\sqrt{340}}$: on retrouve la même valeur. ✓

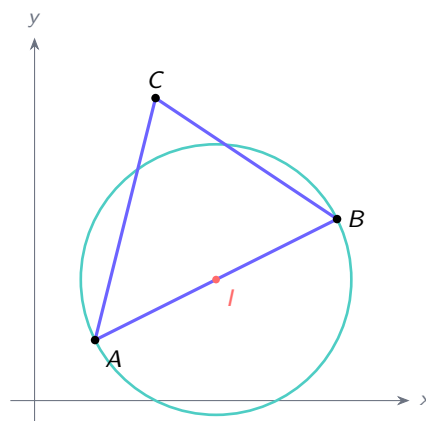
Démonstration / Partie C : cercle de diamètre [AB]

- Milieu $I = \left(\frac{1+5}{2}; \frac{1+3}{2} \right) = (3; 2).$ Rayon $= \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}.$
- $\vec{MA} \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \end{pmatrix}, \vec{MB} \begin{pmatrix} 5-x \\ 3-y \end{pmatrix},$ donc

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (1-x)(5-x) + (1-y)(3-y) = x^2 - 6x + 5 + y^2 - 4y + 3 = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8.$$

La condition $= 0$ donne $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$, soit $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$: cercle de centre $I(3; 2)$ et de rayon $\sqrt{5}$. ✓

- Pour $C(2; 5)$: $(2-3)^2 + (5-2)^2 = 1 + 9 = 10 \neq 5.$ Donc **C n'appartient pas** au cercle. C'est cohérent avec la Partie A : C serait sur ce cercle si et seulement si l'angle en C était droit, ce qui n'est pas le cas.



Démonstration / Partie D : aire

9. $\sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A} = 1 - \frac{144}{340} = \frac{196}{340}$, donc $\sin \hat{A} = \frac{14}{\sqrt{340}}$ (positif). Aire :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \sqrt{20} \times \sqrt{17} \times \frac{14}{\sqrt{340}} = \frac{1}{2} \sqrt{340} \times \frac{14}{\sqrt{340}} = \frac{14}{2} = 7.$$

L'aire du triangle vaut exactement $\boxed{7}$.

Bilan de la fiche. Tu sais désormais : calculer un produit scalaire par les quatre méthodes ($xx' + yy'$, normes et angle, projection, normes seules), tester une orthogonalité, calculer un angle, développer $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2$, appliquer et démontrer la formule d'Al-Kashi, et reconnaître le cercle de diamètre $[AB]$ via $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$. Tout cela resservira en géométrie repérée (fiche suivante) et en Terminale dans l'espace.